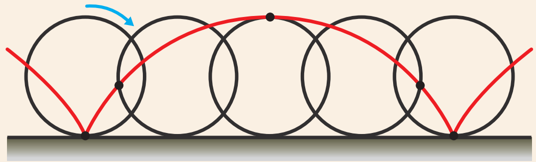
사이클로이드 곡선 (Cycloid Curve)

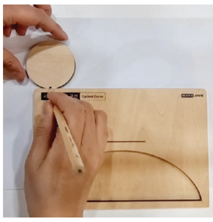
사이클로이드는 직선 위로 원을 굴렸을 때, 원 위의 한 점이 그리는 곡선입니다. 반지름이 r인 원을 이용하여 사이클로이드의 길이와 넓이를 알아봅시다.

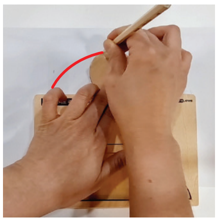


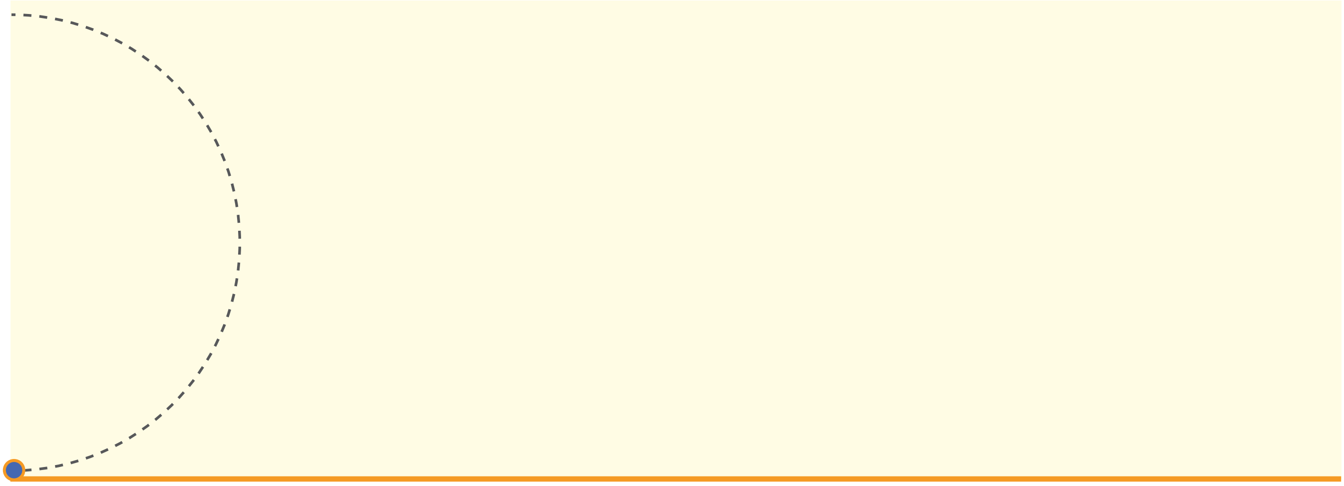
알아보기 사이클로이드 그리기

▶바퀴의 구멍에 연필을 끼우고, 표시된 직선을 따라 바퀴를 굴려보세요.

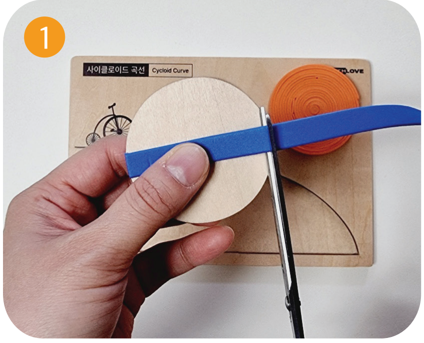
※교구의 구멍에 맞는 연필을 사용해 주세요.
그리는 과정에서 활동지나 교구판이 미끄러질 수 있으니, 교구를 받치고 그리세요.







만들기 1 사이클로이드의 길이

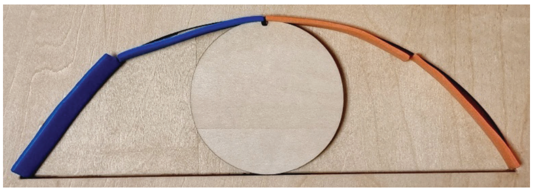


1 띠를 바퀴의 지름의 길이와 같도록 맞춰 자릅니다.

2 자른 조각으로 사이클로이드를 따라 채웁니다.

3 원의 지름과 사이클로이드의 길이를 비교합니다.

탐구하기1 띠를 잘라 채운 모양을 보고 사이클로이드의 길이를 알아봅시다.

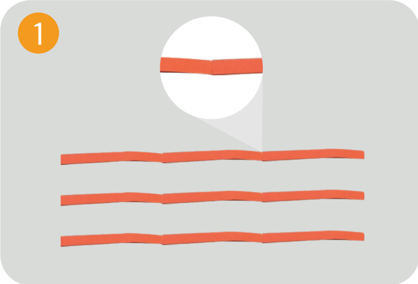


· 사이클로이드를 따라 채운 조각은 $\boxed{4}$ 개입니다.

· 조각의 길이는 원의 $\boxed{\text{지름}}$ 의 길이와 같습니다.

· 사이클로이드의 길이는 원의 지름의 $\boxed{4}$ 배입니다.

만들기 2 사이클로이드의 넓이

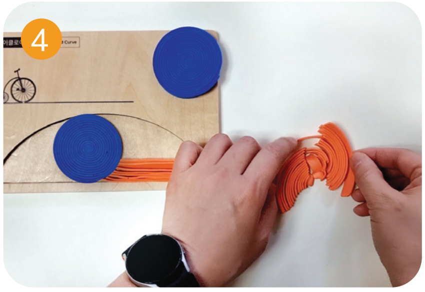


띠를 3개씩 연결하여 3쌍을 만듭니다.

연결한 띠를 말아 나무 바퀴와 크기가 같은 원판 3개를 만듭니다.

TIP 여분의 띠를 사용하여 바퀴와 크기를 맞춥니다.

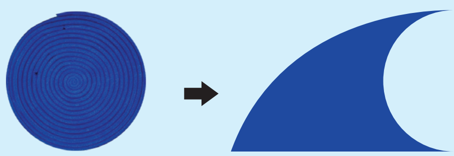
연필로 원판 2개에 원의 지름을 표시한 후, 가위로 지름을 따라 자릅니다.



남은 원판 1개를 사이클로이드와 직선 사이의 가운데 공간에 놓고, 자른 원판으로 빈 공간을 채웁니다.

원의 넓이와 사이클로이드의 넓이를 비교합니다.

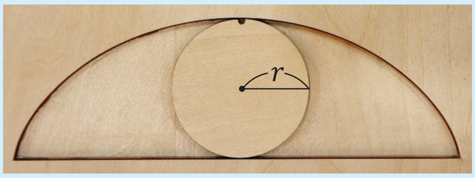
탐구하기2 원을 잘라 채운 모양을 보고 사이클로이드의 넓이를 알아봅시다.



· 사이클로이드의 넓이를 채우는 데 필요한 원판은 $\boxed{3}$ 개입니다.

· 사이클로이드의 넓이는 원의 넓이의 $\boxed{3}$ 배입니다.

탐구하기3 반지름이 r인 원을 이용하여 사이클로이드의 길이와 넓이를 나타내어 봅시다.



원의 둘레 = $2\pi r$ **원의 넓이 = πr^2**

① 사이클로이드의 길이

= 원의 지름 x $\boxed{4}$

= $\boxed{2}$ x r x $\boxed{4}$

= $\boxed{8r}$

② 사이클로이드의 넓이

= 원의 넓이 x $\boxed{3}$

= πr^2 x $\boxed{3}$

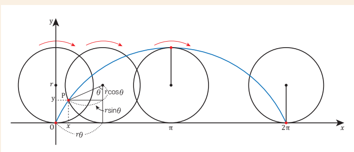
= $\boxed{3\pi r^2}$

심화탐구

적분으로 알아보는 사이클로이드의 길이와 넓이

· 반지름이 r인 원이 직선 위를 구를 때, 원 위의 한 점이 그리는 곡선은 원이 회전한 각의 크기 θ를 매개변수로 하여 다음과 같이 나타낼 수 있습니다.

$$\begin{cases} x = r(\theta - \sin\theta) \\ y = r(1 - \cos\theta) \end{cases}$$



· 매개변수로 나타낸 곡선 $x = f(\theta)$, $y = g(\theta)$ $(a \leq \theta \leq b)$의 길이 l은 곡선 위의 점 P가 $\theta = a$에서 $\theta = b$까지 움직인 거리와 같습니다. 이를 정리하면, $l = \int_a^b \sqrt{\{f'(\theta)\}^2 + \{g'(\theta)\}^2}\,d\theta$입니다.

사이클로이드의 길이

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\{f'(\theta)\}^2 + \{g'(\theta)\}^2}\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1 - \cos\theta)^2 + r^2(\sin\theta)^2}\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} r\sqrt{2 - 2\cos\theta}\,d\theta$$

$$= 8r$$

사이클로이드의 넓이

$$\int_0^{2\pi} y\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} r(1 - \cos\theta) \times r(1 - \cos\theta)\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} r^2(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= 3\pi r^2$$